좌표계

천체의 위치를 나타내는데는 기본적으로 그 위치의 기준이 되는 틀이 필요하다. 그것을 좌표계라고 하는데, 천문학에서 쓰이는 좌표계는 크게 4가지가 있다. 그것은 지평좌표계(horizon coordinates system), 적도좌표계(equatorial coordinates system), 황도좌표계(ecliptic coordinates system), 은하좌표계(galactic coordinates system) 이다.

각 좌표계마다 특징이 있으며 상황에 따라 어느 좌표계를 써야할지 결정이 된다. 이런 좌표계를 알려면 기본적으로 좌표계가 무엇인지 또 하나의 좌표계에서 다른 좌표계로 변환(예를 들어 구면좌표계에서 직교좌표계로 변환, 또는 좌표계 회전)할때 기본적인 수학적 식들과 또 앞에서 언급한 시간에 대한 개념을 명확히 이해하고 있어야 좌표계를 자유자제로 사용할 수 있다.

나중에 행성의 위치를 계산한다든가, 별자리 관련 프로그래밍을 하고 싶은 사람들은 이 부분은 명확히 이해하고 활용해보는 것이 필요할 것이다. 아래에는 이들 좌표계에대해 간략하게 소개해 놓았다.

지평좌표계(horizon coordinates system)

기준면은 지평면이고 기준점은 북점이 되는 좌표계. 측정방법은 북점으로부터 시계방향(동쪽)으로 천체의 발까지 지평면을 따라 각도를 재어 방위각(단위:)을 재고 천체의 발로부터 천체까지 천정쪽으로 +, 천저쪽으로 -로 고도(단위 :)를 잰다.

이 좌표계의 특징은 시시각각 천체의 위치가 변한다는 것이며 일출, 일몰, 천체의 출몰시각등을 계산하는데 이 좌표계를 쓰며 우리 일상생활에 가장 적절한 좌표계라는 것을 알 수 있다. 이 좌표계에서 대기굴절에 대한 계산도 하게 된다.

적도좌표계(equatorial coordinates system)

기준면은 적도면이고 기준점은 춘분점(春分點)이 되는 좌표계. 측정방법은 춘분점으로부터 지구의 공전방향으로 천체의 발까지 적도면을 따라 시간단위로 적경을 재고 천체의 발로부터 천체까지 북극쪽을 +, 남극쪽은 -로 적위를 잰다.

항성과 행성들의 위치를 나타내는 데에 적도좌표를 많이 사용한다. 항성에 대해서 적도좌표의 값은 시간에 따라 변하지 않지만 적도와 춘분점이 세차(歲差)와 장동(章動)운동으로 움직이고 항성도 공간에서 공유운동 하기 때문에 실제로는 조금씩 움직이고 있다. 항성의 고유운동을 제외한 세차, 장동운동의 영향을 생각치 않기 위해 1950년 초부터 적도와 춘분점을 기준으로한 적도좌표가 많이 쓰이고 있다.

황도좌표계(ecliptic coordinates system)

기준면은 황도면이고 기준점은 춘분점이되는 좌표계, 측정방법은 춘분점으로부터 지구의 공전방향으로 천체의 발까지 황도면을 따라 각도를 재어 황경(단위:)을 재고 천체의 발로부터 천체까지 북으로 + 남으로 -값으로 황위를 잰다.

이 좌표계는 일반적으로 태양계 내의 천체의 위치를 측정하는데 쓰며, 지구의 중심에서 본 경우를 지심(地心)황도좌표계, 태양의 중심에서 본 경우를 일심(日心)황도좌표계라 한다.

은하좌표계(galactic coordinates syst)

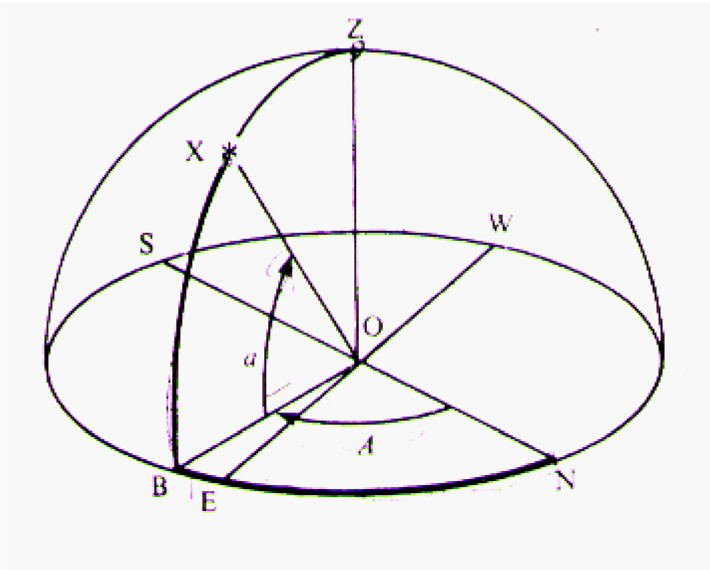
기준면은 은하면(은하적도)이고 기준점은 은하중심(궁수자리방향)이 되는 좌표계, 측정방법은 은하중심으로부터 동쪽

으로 은하적도를 따라 각도를 재어 은경(단위:)을 재고 천체의 발로부터 천체까지 은하의 북극을 +, 남으로 -값으로 은경을 잰다.

이 좌표는 우리 은하계에 관련된 현상을 논할 때 쓰여진다.

지평좌표계 Horizon coordinates system

지평좌표계는 우리가 평상시에 가장 많이 접하는 좌표계이다. 바로 지금 있는 곳에서 그저 하늘을 바라보면 바로 지평좌표계에서 하늘을 보는 것과 같다. 지평좌표계에서 어떤 천체의 위치를 측정하는데 방위각(azimuth)와 고도(altitude)가 있다.



먼저 이들 값을 알기위해 기준면과 기준점을 알아둘 필요가 있다. 이것들은 다른 좌표계에서도 같은 개념으로 쓰인다. 지평좌표계에서 기준면은 지평면으로 한다. 바로 관측자가 서있는 지평선을 포함하는 면을 말한다. 그리고 기준점은 지평면의 북점을 기준으로 한다. 이들 지평면과 북점을 기준으로 하여 지평좌표계에서 천체의 위치를 측정할 수 있는 것이다. 특별히 관측자의 바로 머리 위부분을 천정이라하고 발아래 천정의 반대방향의 천구의 점은 천저라 한다.

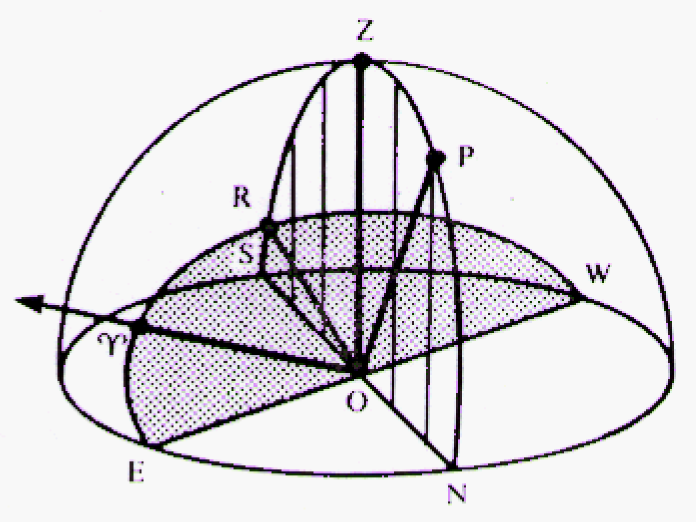
지평좌표계에서 방위각(A)과 고도(h)는 오른쪽에 그림처럼 방위각은 북점을 기준으로 시계방향(동쪽)으로 재어나가고 고도는 천체의 발로부터 지평면의 수직면을 따라 재 나간다. 둘다 단위는 을 사용하며 방위각은 0~360까지 고도는 천정쪽으로 잴때는 +, 천저쪽으로 잴때는 -를 붙여서 범위는 0~90까지 된다. 예를들어 동점은 방위각이 90도이고 고도는 0도 일것이다. 또 남점은 방위각이 90도 이고 고도는 0도이다. 천정은 방위각을 잴 수 없고 고도는 90도이다.

지평좌표계는 관측자의 위치를 중심으로 천체의 위치를 기술한 것이기 때문에 지구 자전으로 인한 실시간 변하는 천체의 위치를 나타내는데 문제가 있다. 그래서 별의 고유 위치를 정하는데 이 지평좌표계는 쓰이지 않는다. 다만 지평좌표계가 쓰이는 것을 일몰 시간이라던가, 별의 일몰시간등를 계산하는데 유용한 좌표계이고 우리의 실생활에 가장 많이 접해지는 좌표계인 것이다.

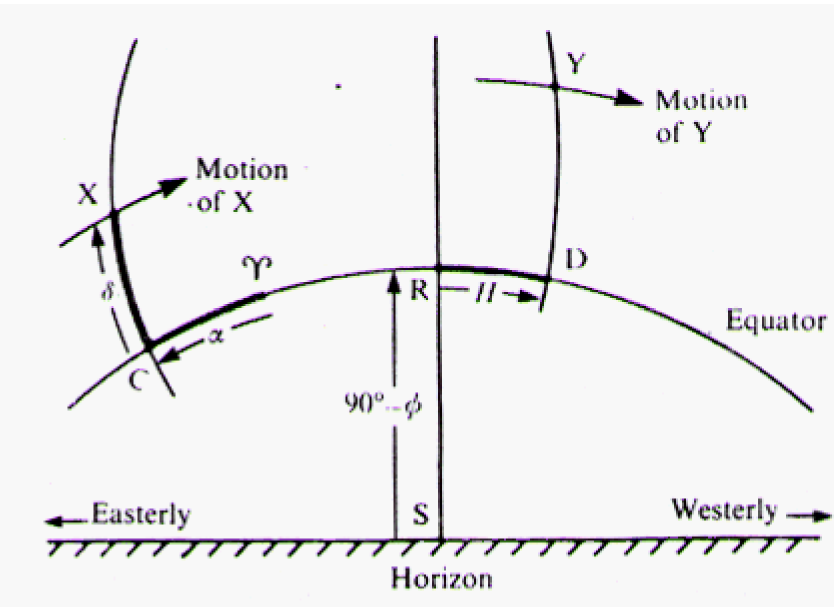
나중에 우리는 행성의 위치를 계산한다든가 별의 위치를 계산하여 이 좌표계에서 이들의 위치는 어떻게 표시되는가에 관해서 논해볼 것이다. 바로 지금 이 시간, 여기서 하늘을 바라보면 태양의 위치가 어딜까? 달의 위치가 어딜까? 등을 논하게 될 것이다.

적도좌표계 Equatorial coordinates

그 말이 암시해 주듯이, 이 좌표계는 지구의 적도를 기준으로 한다.



지표면 위의 한점 점 O에 있는 관측자(북반구에 있다고 가정한다.)를 생각해 보자. 원NESW는 여전히 그의 지평면이고, 점 Z는 그의 천장이다. 별까지의 거리는 매우 멀기 때문에, 지구와 그 위에 서 있는 관측자는 한 개의 점으로 줄어들고 만다. 그렇게 되면 적도가 확장된 평면은 천구를 원ERW로 나눌 것이다. 이것이 적도면이고, 지평면에서 (90 -위도)만큼 기울어져 있다. 예를 들어 북위52 에 사는 관측자는 이 각이 38 가 된다. 지구의 자전축을 따라 나 있는 OP 주변으로(점 P를 천구의 북극 또는 줄여서 북극이라고 한다.) 적도 면을 따라 모든 별들은 원을 그린다.



위의 그림은 O에 있는 관측자가 하늘을 보는 모습이다. 지평면에 남점 S가 표시되어 있고, 가상의 적도 선CRD가 그어져 있다. R과 S를 통과하는 호는 그림 6a에서 대원 NPZRS를 나타낸다. 또한 XC를 통과하는 호는 그림 6a에는 나오지 않았지만, PXC를 통과해 가는 대원이다. X위치에 있는 별을 고려해 보자. 호 XC, 즉 점 O에서 본 X와 C의 각도는 X의 적위(declination,)라고 불린다. 이것은 적도로부터 '얼마나 높이 있는가'를 의미한다. 다른 좌표인 '얼마나 돌았는가?'는 하늘에서 고정된 점인 를 기준으로 한다. 이 방향은 춘분점(vernal equinox또는 first point of Aries)이라 불리는 것으로서, 지구 적도평면과 지구 공전 평면의 교점에 위치하고 있다. 그 점에 대해 정의하는 것을 신경 쓸 필요는 없다. 우리가 알아야 할 것은 단지 가 별들과 비교해 볼 때 고정된 상태로 유지된다는 것, 그리고 그러하므로 다른 좌표를 이로부터 측정할 수 있다는 사실이다. 이 좌표가 적경(right ascension,)이라는 것이며, 각도는 O에서 봤을 때, 점 와 C간의 각도가 된다.

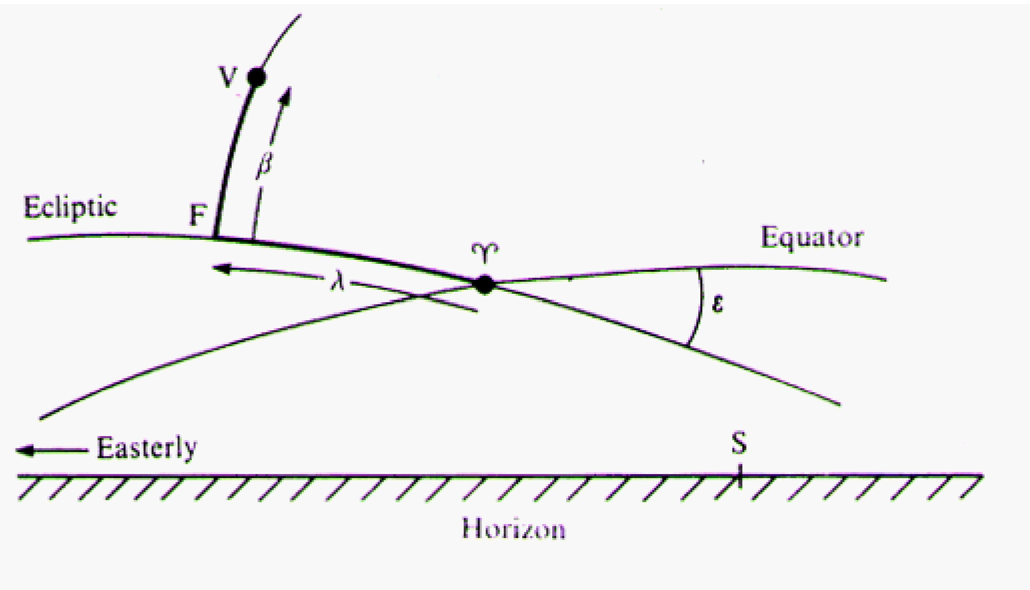
하루에 걸쳐 별 X는 P를 중심으로 서쪽으로 천천히 움직이며, 항성시로 24시간 후에는 완전히 한바퀴 돌게 된다.

이 원은 적도와 평행한 원이기 때문에 적위(declination)는 변하지 않는다. 게다가, 가 하늘에서 고정되어 있기 때문에, 그것은 적도를 따라 원 주위를 정확히 같은 비율로 움직이게 된다. 그러므로 적경(right ascension) 또한 변하지 않게 된다. 와 는 별과 다른 '고정된' 천체들의 위치를 기술하는데 이상적인 좌표계이다. 적경과 관련된 또 하나의 '얼마나 돌았는가?' 좌표는 시간각(hour-angle, H)이라는 것이다. 별 Y에 대해서, 시간각은 O를 중심으로 R과 D의 떨어진 거리를 의미한다. 이것은 별이 적도 주위를 남점 R로부터 얼마나 돌았는가를 나타낸다. 이것은 또한 별이 자오선을 지난지 몇 시간이 흘렀는지를 나타낸다. H는 시간이 지남에 따라 정확히 일정하게 증가한다. 만일 H가 0이라면, 그 별은 대원 NPZRS을 지나고 있는 것이다. 이 원은 자오선(meridian)이라 불리며, 그 별은 남중했다(transit or culminate)고 말해 진다. 이것의 크기는 그러므로 방위각*이 180도일 때 가장 커진다.(만일 적위가 그 지방의 위도보다 크다고 가정할 때) 적위(declination)는 각도로 측정되며, 적도의 북쪽에 있을 때 +가 되고, 남쪽에 있을 때 ?가 된다. 시간각(hour-angle)과 적경(right-ascension)또한 각도로 측정될 수 있다. 0 에서부터 360 까지. 는 에서 동쪽으로 갈수록 커지며, 에서는 0이 된다(시간각 H에 대해서는 반대임을 주의하기 바란다). 보다 일반적으로, 그러나, 이 두 좌표 H와 는 시, 분, 초의 꼴로 0시에서 24시 사이로 측정된다. 한 바퀴, 즉 360 는 항성시로 24시간이 된다. 그러므로 한시간은 15 에 해당한다. 'X의 적경이 90 '라는 말과 'X의 적경이 6h'라는 말은 같다. 서로간의 변환은 15를 곱하거나 나누기만 하면 된다. 어떤 시간에 별의 적경을 알아내는 방법은 남중하는 별의 적경(right ascension)은 그 지방의 항성시(local sidereal time)와 같다는 사실을 이용하는 것이다.

황도 좌표계 Ecliptic coordinates

지구가 태양 주변을 도는 면을 황도라 한다. 우리 태양계의 다른 행성들도 이 평면에 근접한 궤도를 가진다. 태양계 내에 있는 물체를 계산할 때, 그러므로 황도를 기준으로 한 좌표계를 정의하면 편리하다. 이것을 황도좌표계라 부른다.

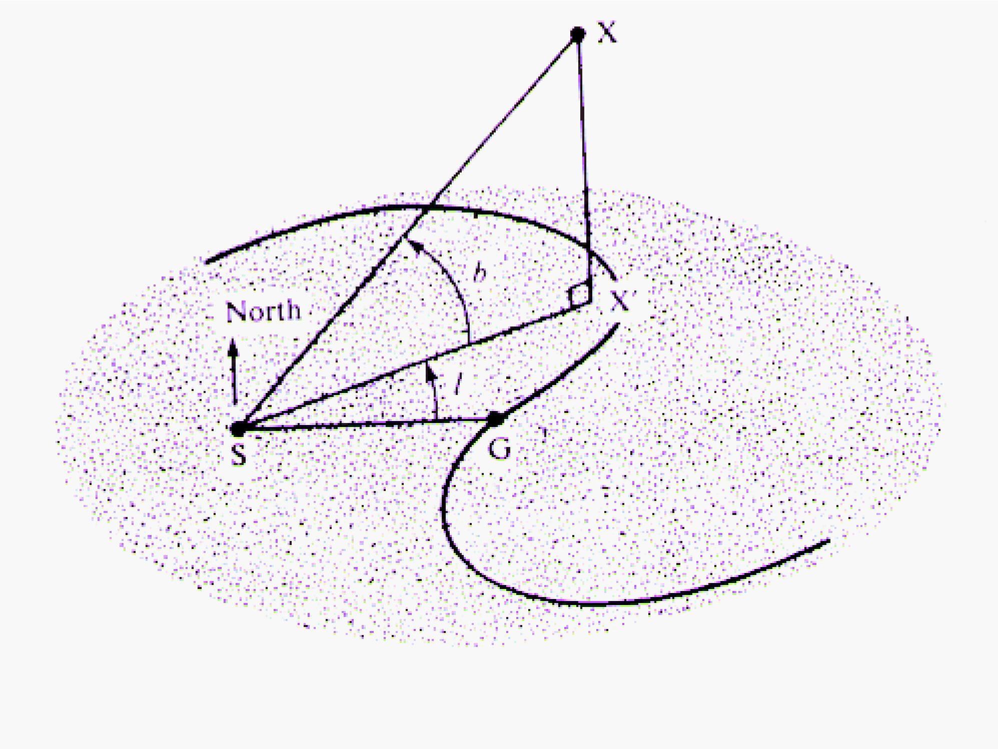
적도좌표계처럼 이 좌표계 또한 춘분점 를 참고로 한다. 다음 그림은 이 좌표계가 어떻게 쓰이는가를 보여준다.



천의 적도와, 황도의 가상적인 자취가 하늘에 그려져 있다. 이 두 자취의 교점이 춘분점 이다. 두 평면은 거의 23 26'만큼 기울어져 있다. 이것은 황도의 경사각(obliquity)이라 불리며, 기호 로 주어져 있다. 이 각은 황도면에 수직인 선과 지구의 회전축이 이루는 각이다. 그림 7에는 행성 V도 나타나 있다. 이것은 황도의 극으로부터 그어져서, 황도를 점 F에서 자르는 대원의 일부이다. 이제, 황경(ecliptic longitude,)을 F와 가 이루는 각도로, 황위(ecliptic latitue,)를 F와 V가 이루는 각으로 정의한다. 적도 좌표계와 마찬가지로, 는 행성이 황도보다 위(즉, 북쪽)에 있을 때+, 아래에 있을 때 ?값을 갖는다. 의 경우에는, 동쪽으로 갈수록 증가한다. 와 두 경우 모두 일반적으로 각도를 쓴다. 일 년 동안, 태양은 황도를 따라 동쪽으로 움직인다. 정의에 따르면, 태양의 황위는 언제나 0이 된다. 3월 21일이 되면, 태양은 춘분점에 위치하고, 적경과 적위가 0이 된다. 황경도 또한 0이 된다. 그 후로 황경은 꾸준히 증가하여, 석 달 후 북반구에 여름이 되면, 90 가 된다. 일년이 지나면, 태양은 제자리로 돌아오고, 황경은 360 가 된다.

은하 좌표계 Galactic coordinates

천문학자들은 때때로 우리 은하 안에 있는 별들이나 다른 천체들 간의 관계를 기술할 필요가 있다. 그럴 경우에, 은하 좌표계를 사용하는 것이 편리하다. 이번에는 은하면이 기준면이 되고, 태양과 은하의 중심을 잇는 선이 기준 방향이 된다. 다음 그림이 이 상황을 설명해 준다.



S라고 표시된 점이 태양을 나타내고, G라고 표시한 점이 은하의 중심을 나타낸다. X는 은하면 상에 있지 않은 어떤 별이다. 적도 좌표계에서, G의 위치는 =17h 42.4m, =-28 55'이다. SG와 SX'는 모두 은하 평면상에 있는 직선들이다. X'은 그 별의 은하 평면 위로의 투영이다.
은경(galactic longitude)은 각도 l에 해당하는 각이고, 은위(galactic latitude)는 각도 b에 해당하는 각이다. 은경은 0 부터 360 까지, 적경이 증가하는 방향으로 증가하며, 은위는 그 평면의 북쪽에서 0 에서 90 의 값을 가지고, 남쪽에서 0 에서 ?90 의 값을 가진다. 이 좌표계는 예를 들어 은하수에서 별의 위치를 찾을 때 사용된다.

시간을 각으로 바꾸기

시간으로 표시된 별의 시간각이나 적경을 각도로 표시하는 일은 천문학에서 일반적인 연습거리이다. 이러한 변환은 지구가 24시간 동안 360 를 돈다는 사실을 기억함으로써 행해진다. 그러므로 360 는 24시간과 같고, 한시간은 15 와 같다. 십진수 시간을 십진수 각도로 바꾸는 것은 단순히 15를 곱하거나 나누기만 하면 된다.
예를 들어, 적경이 =9h 36m 10.2s라면 그것은 =144 02'33''에 해당한다.
시간을 입력받아서 각으로 바꾸는 C함수는 다음과 같다.

```
#include "math.h"

typedef struct _DEGREE
        {
        int degree;
        int minute;
        float second;
```

```
        } DEGREE;

typedef struct _TIME
        {
        int hour;
        int minute;
        float second;
        } TIME;

DEGREE change(TIME time)
{
        double total;
        DEGREE degree;
        total=time.hour*15+time.minute/60.*15.+time.second/3600.*15.;
        degree.degree=(int)floor(total);
        degree.minute=(int)(floor((total-degree.degree)*60));
        degree.second=(60*(total-degree.degree)-degree.minute)*60;
        return degree;
}
```

적경을 시간각으로 바꾸기

시간각(hour-angle, H)과 적경(right ascension, α)은 다음 간단한 공식을 이용하여 전환 가능하다.

$H = LST - \alpha$

여기서 LST는 지방 항성시(local sidereal time)를 나타낸다.

적도좌표를 지평좌표로 바꾸기

시간각(hour-angle, H)와 적위(declination, δ), 방위각(azimuth, A), 고도(altitude, a)간의 관계를 나타내는 다음 공식이 있다.

$sina = sin\delta sin\phi + cos\delta cos\phi cos\,\mathrm{H}$

$cosA = \dfrac{sin\delta - sin\phi sina}{cos\phi cosa}$

여기서 ϕ는 관측자의 지리적인 위도이다. 시간각은 앞에서 설명한 방법에 따라 적경으로부터 구해진다.

cos의 역계산은 우리에게 +90~-90의 범위를 주지 않는다. 그리하여 다음 공식이 더 많이 쓰인다.

$tanA = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-cos\delta cos\phi sinH}{sin\delta - sin\phi sina}$

지평 좌표를 적도 좌표로 바꾸기

별의 방위각(azimuth, A), 고도(altitude, a)가 주어진 별의 적위(declination, δ)와 시간각(hour-angle, H)은 어떻게 되는가?

여기에 알맞은 공식은 다음과 같다.

$sin\delta = sinasin\phi + cosacos\phi cosA$

$$cosH = \frac{sina - sin\phi sin\delta}{cos\phi cos\delta}$$

여기서, φ는 관측자의 지리적인 위도를 나타낸다. 이 공식들 은 이전에 다루었던 적도 좌표를 지평 좌표로 바꾸는 공식들과 완전히 같은 것임을 확인하여라. 단지 δ와 H만이 a와 A로 완전히 바뀌었다. 이 사실은 프로그래밍 가능한 계산기를 사용할 때, 같은 프로그램으로 δ,H를 a,A로, a,A를 δ,H로 바꿀 수 있게 하는 등 매우 유용하게 사용할 수 있다.

마찬가지로 cos의 역이 -90~90의 범위를 리턴하지 않기 때문에 다음 공식이 쓰인다.

$$tanH = \frac{y}{x} = \frac{-cosacos\phi sinA}{sina - sin\phi sin\delta}$$

황도 좌표를 적도 좌표로 바꾸기

황경(ecliptic longitude,λ)과 황위(ecliptic latitude,β)는 적경(right ascension,α)과 적위(declination, δ)로 변환 될 수 있다. 이용가능한 공식이 다음에 있다.

$$tan\alpha = \frac{sin\lambda cos\epsilon - tan\beta sin\epsilon}{cos\lambda}$$

$$sin\delta = sin\beta cos\epsilon + cos\beta sin\epsilon sin\lambda$$

여기서 ε는 황도경사각(obliquity of the ecliptic)이다. 이 각은 시간에 따라 매우 천천히 변하므로 매우 고도로 정밀한 값을 사용할 수 있다. 각각의 다른 원기에서 ε를 계산하는 방법은 뒤에 기술되어 있다. 대략적인 황도 경사각은 다음과 같이 주어진다.

$$\epsilon = 23°26'21.45'' - 46.815''T - 0.0006T^2 + 0.00181''T^3$$

적도 좌표를 황도 좌표로 바꾸기

적경(right ascension,α)과 적위(declination, δ)로부터, 황경(ecliptic longitude,λ)과 황위(ecliptic latitude,β)를 구해낼 수 있다. 공식은 다음에 있다.

$$tan\lambda = \frac{sin\alpha cos\epsilon + tan\delta sin\epsilon}{cos\alpha}$$

$$sin\beta = sin\delta cos\epsilon - cos\delta sin\epsilon sin\alpha$$

여기서 ε는 황도경사각(obliquity of the ecliptic)이다. 이것에 대해서는 이전에 설명하였다.

이 공식들은 이전의 공식들과 λ,β와, α,δ만 바꾼 것과 아주 유사하다. 그러나 대칭이 완전히 성립하는 것은 아닌데, 그것은 부호가 약간 다르기 때문이다.

적도좌표를 은하좌표로 바꾸기

종종 우리는 은하 내에서, 어떤 별과 다른 별과의 관계에 대해 알아야 한다. 이 경우에 우리는 은하 좌표계를 사용한다. 변환 공식은 다음과 같다.

$$sinb = cos\delta cos(27.4)cos(alpha - 192.25) + sin\delta sin(27.4)$$

$$tan(l - 33) = \frac{sin\delta - sinbsin(27.4)}{cos\delta sin(alpha - 192.25)cos(27.4)}$$

숫자들은 다음과 같은 우리 은하의 자료들로부터 온 것이다. 은하의 북극은 α=192°15', δ=+27°24'이다. 천의 적도에 대한 은하면의 상승점(ascending node)은 l=33°이다.

은하좌표를 적도좌표로 바꾸기

어떤 별의 주어진 은하 좌표, l,b가 주어졌을 때, 그 별의 적도 좌표값은 어떻게 되는가? 이 질문에 답하기 위해서

우리는 다음과 같은 변환 공식들을 이용해야 한다.

$$sin\delta = cosbcos(27.4)sin(l-33) + sinbsin(27.4)$$

$$tan(\alpha - 192.25) = \frac{cosbcos(l-33)}{sinbcos(27.4) - cosbsin(27.4)sin(l-33)}$$

α와 δ는 각도로 표시된다.

일반화된 좌표 변환법

이전 글들에 기술된 어떤 좌표계에서 다른 좌표계로 전환하는 방법들은일반적인 단순한 계산들을 할 때는 꽤 적합하다. 그러나 만일 컴퓨터나 행렬을 다룰 수 있는 계산기를 가지고 있다면, 보다 일반적인 좌표변환 방법들에 관심이 있을 것이다.

이렇게 되면, 예를 들어 '은하 좌표계에서 지평 좌표계'로, 또는 '지평 좌표계에서 황도 좌표계로'와 같은, 두 좌표계 간의 변환을 위해서 단지 하나의 프로그램만이 필요할 뿐이다. 이 방법은 숫자들을 행과 열을 맞춰 써 놓은 것인 행렬이란 것을 이용한다. 이 숫자들의 컴퓨터 안에서의 조작은 항상 같다. 다른 좌표계 간의 변환은 행렬 안에 있는 숫자들만 바꾸어 주면 된다.

우리가 다루고자 하는 행렬은 3*3 크기이다. 그것은 다음과 같은 9개의 숫자들로 이루어 진다.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

각각의 알파벳들은 어떤 숫자를 나타낸다. 우리는 이 전체 행렬을 대문자 굵은 알파벳 하나로 나타낸다. 위의 행렬을 A라고 하자.

어떤 점의 좌표는 열벡터라는 것으로 표시될 수 있다. 이것은 특별한 것이 아니고, 1열 3행짜리 행렬일 뿐이다. 만일 x,y,z가 그 벡터의 성분이라면 우리는 그것을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

굵은 소문자 v는 벡터를 나타낸다. 우리의 프로그램은 단순히 A와 v에 어떤 값을 넣고 그것들을 곱해 새로운 열벡터 w를 얻어내는 것이다. 우리는 새 좌표를 w로부터 추출할 수 있다. 기호로는 이것을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$w = A \cdot v$$

그러면 이 변환법의 실제 사용법을 알아보자.

좌표 (u,v)로부터 열벡터 v를 구하고 싶다면 아래 공식을 따른다.

$$v = \begin{pmatrix} cosu \cdot cosv \\ sinu \cdot cosv \\ sinv \end{pmatrix}$$

열벡터 w로부터 다시 좌표(θ,ψ)를 구하고 싶다면 아래 공식을 따른다.

$$tan\theta = \frac{n}{m}, sin\psi = p$$

(H,δ)와 (A,a), (α,δ)와 (H,δ), (α,δ)와 (λ,β) 그리고 (l,b)와 (α,δ)간의 변환을 위한 행렬들은 아래 표에 주어져 있다.

from(v)	to(w)	matrix
α,δ	H,δ	$\begin{pmatrix} cosST & sinST & 0 \\ sinST & -cosST & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	λ,β	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\epsilon & sin\epsilon \\ 0 & -sin\epsilon & cos\epsilon \end{pmatrix}$
	l,b	

		$\begin{pmatrix} -0.0669887 & -0.8727558 & -0.4835389 \\ 0.4927285 & -0.4503470 & 0.7445846 \\ -0.8676008 & -0.1883746 & 0.4601998 \end{pmatrix}$
H,δ	α,δ	$\begin{pmatrix} cosST & sinST & 0 \\ sinST & -cosST & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	A,a	$\begin{pmatrix} -sin\phi & 0 & cos\phi \\ 0 & -1 & 0 \\ cos\phi & 0 & sin\phi \end{pmatrix}$
A,a	H,δ	$\begin{pmatrix} -sin\phi & 0 & cos\phi \\ 0 & -1 & 0 \\ cos\phi & 0 & sin\phi \end{pmatrix}$
λ,β	α,δ	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\epsilon & -sin\epsilon \\ 0 & sin\epsilon & cos\epsilon \end{pmatrix}$
l,b	α,δ	$\begin{pmatrix} -0.0669887 & 0.4927285 & -0.8676008 \\ -0.8727558 & -0.4503470 & -0.1883746 \\ -0.4835389 & 0.7445846 & 0.4601998 \end{pmatrix}$

만약 다른 조합의 변환을 하고 싶다면 -예를 들어 (A,a)에서 (λ,β)- 주어진 행렬을 거듭해서 사용함으로서 구할 수 있다. 또는 행렬을 먼저 계산한 다음 그것을 사용해도 된다. 예를 들어 황도 좌표계(λ,β)를 v라 하고, 지평 좌표계 (A,a)를 w라 하면, 이것은 다음과 같이 쓰일 수 있다.

$w = A \cdot B \cdot C' \cdot v$

두 천체 간의 각거리

때때로 하늘에 있는 두 물체 사이의 각도가 관심이 있을 때가 있다. 이것은 두 물체의 적도 좌표값(α,δ)이나 황도 좌표(λ,β)로부터 쉽게 구해질 수 있다.

공식은

$cosd = sin\delta_1 sin\delta_2 + cos\delta_1 cos\delta_2 cos(\alpha_1 - \alpha_2)$

또는

$cosd = sin\beta_1 sin\beta_2 + cos\beta_1 cos\beta_2 cos(\lambda_1 - \lambda_2)$

이다. 여기서 d는 좌표값이 α1, δ1(또는 λ1, β1)인 물체와 α2, δ2(또는 λ2, β2)인 물체 사이의 각도에 해당한다. 이 공식은 정확하고, 수학적으로 어떤 α,δ와 λ,β값에 대해서도 정확하다. 그러나 만약 d가 아주 작아진다거나 180°에 가까워진다면, 계산기에서는 정확한 숫자를 구할만한 정밀함이 없기 때문에 이 경우 보다 나은 계산법은

$d = \sqrt{cos^2\delta \cdot \Delta\alpha^2 + \Delta\delta^2}$

또는

$d = \sqrt{cos^2\beta \cdot \Delta\lambda^2 + \Delta\beta^2}$

이다. 여기에서 Δα,Δδ(또는 Δλ,Δβ)는 두 좌표값 간의 차이이다.(즉, Δα = α1-α2) 이 표현법은 0°나 180°에서 10' 이상 차이나지 않는 경우에 사용할 수 있다. Δα(Δλ)와 Δδ(Δβ)모두 같은 단위로 표시되어야 하며, 결과 값도 같은 단위로 나오게 된다.

뜸 & 짐

항성일이 지나감에 따라, 별과, 다른 고정된 천체들은 지구의 회전축을 중심으로 원을 그리며 돈다. 완전히 한바퀴 도는데는 24시간이 걸린다. 그래서, 지구의 북극에 아주 가까운 북극성이라는 별이 있는데, 전체 하늘이 북극성을 중심으로 회전하는 것처럼 보인다. 그러나 이 별이 다른 별들과 달리 특별한 것이라곤 아무것도 없으며, 천의 남극

에는 해당하는 별이 없다. 어떤 경우에든, 극들은 지구의 세차에 의해서 천천히 움직인다. 북극성은 몇 천 년 후엔 천구의 극에 있는 별이 아닐 것이다.
가시적인 별의 회전은 물론 극거리(polar distance, 그 물체와 천구의 북극간에 얼마나 멀리 떨어져 있나),에 관련이 있다. 극거리가 적당히 짧은 별들은 회전을 하더라도, 지지 않는다. 이러한 별들을 주극성(circumpolar)이라 한다. 극거리가 증가함에 따라, 그러나 하루 중 어떤 시간에 지평선을 건드리는 극거리 값에 도달하게 된다. 이것보다 큰 극거리를 가지는 별들은 일정한 시간을 지평선 아래에서, 즉, 관측자의 시야에서 사라진 채로 보내게 된다.
어떤 별이 지평선을 가로지르고 내려가는 것을 '진다'고 하고, 올라가는 것을 '뜬다'고 한다. 뜨고 지는 시간과, 그것이 일어나는 방위각은 다음과 같은 공식으로 계산되어질 수 있다.

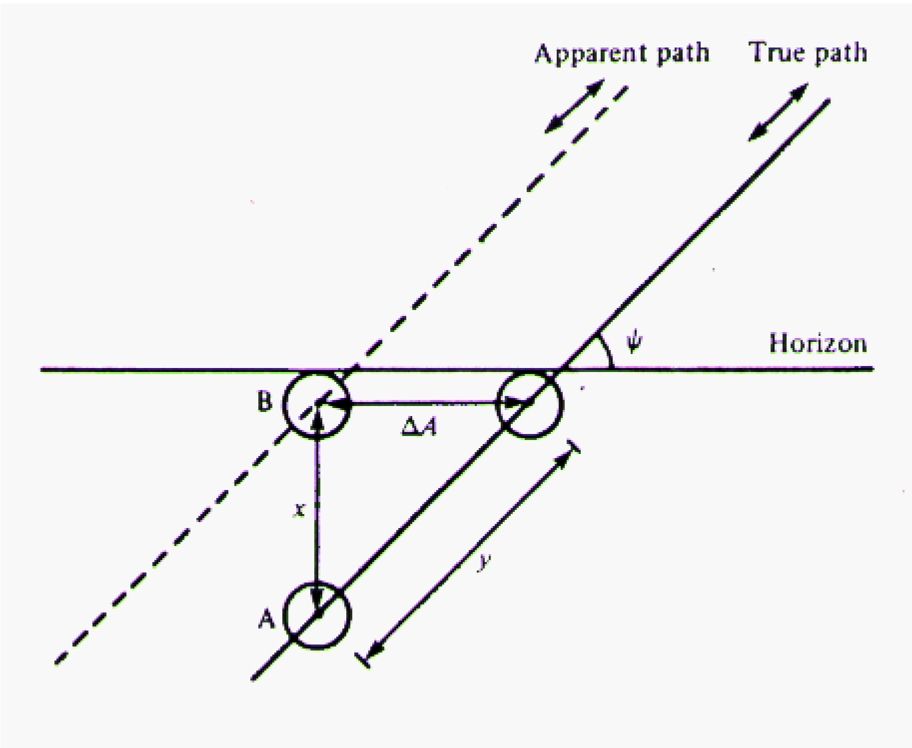
$$LST_r = 24 - \frac{1}{15}\cos^{-1}(-\tan\phi\tan\delta) + \alpha$$

$$LST_s = \frac{1}{15}\cos^{-1}(-\tan\phi\tan\delta) + \alpha$$

$$A_s = 360 - \cos^{-1}\left(\frac{\sin\delta}{\cos\phi}\right)$$

$$A_r = \cos^{-1}\left(\frac{\sin\delta}{\cos\phi}\right)$$

여기서 아래 첨자 r과 s는 각각 뜸(rising), 짐(setting)을, A는 방위각을, LST는 지방 항성시를, α는 적경을, δ는 적위를, ϕ는 관측자의 지리적인 위도를 의미한다. 이 공식들은 고도가 0이 되는 시간들을 구해 준다. 만일 지평선이 이것 보다 높으면, 혹은 단신이 언덕위에 있으면, 당신의 위치에서 볼수 있는 뜨고 지는 시각은 이와는 약간 달라질 것이다.(아래에서 다루겠다)
LST는 section 15,13,10에서 다뤄진 방법대로 UT로 바꿔지고, 지방시로 바뀌질 수 있다. 결과적으로 별의 뜨고 짐에 관련된 모든 것들이 계산되어질 수 있다.
이 계산들에서, 우리는 별들의 좌표만이 이들의 하늘상에서 보이는 지점을 결정한다고 가정하였다. 그러나 많은 요소들, 예를 들어 대기의 굴절이나, 지구에 상당히 가까운 물체일 경우에는 시차(parallax)등이 천체의 보이는 위치를 이동시키고, 뜨고 지는 시간에 약 몇분 정도의 변화가 생긴다.



그림에 뜨고 지는 상황이 나타나 있다. 천체는 지평면 상에서 B를 통과하는 것으로 보인다. 그러나 보정 되지 않은 채 좌표값만으로 계산된, 실제 위치는 A이다. 우리가 수직 이동 거리,x를 알고 있다고 가정하면, 우리는 쉽게 ΔA와

y를 계산할 수 있고, 방위각과 뜨는 시간을 보정할 수 있다. 공식은 다음과 같다.

$$\sin y = \frac{\sin x}{\sin \psi}$$

$$\sin \Delta A = \frac{\tan x}{\tan \psi}$$

$$\cos \psi = \frac{\sin \phi}{\cos \delta}$$

지는 시간에 더해지고, 뜨는 시간에 빼지는 시간은 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta t = \frac{240y}{\cos \delta}\text{초}$$

여기서 y는 각도로 표현되어야 한다. 대기의 굴절에 의한 x값은 약 34분이다.

세차 Precession

이전에 우리는 적경 좌표계는 지구의 운동에 독립적이고, 그러므로 상수로 정해지므로, 고정된 별의 위치를 표시하는데 이상적이라고 밝혔다. 이것은 꽤 높은 정확도를 가진다. 그러나 그 좌표계조차 실제로는 조금씩 변한다는 사실이 밝혀졌다. 이것은 지구의 축이 소용돌이 모양의 운동을 하기 때문이다. 매일매일 빠른 속도로 지구의 축을 중심으로 회전하는 것 처럼, 지구의 축 또한 긴 시간에 걸쳐 우주상의 고정된 방향을 중심으로 회전하고 있는 것이다.
이 운동은 달과 태양의 효과로 인한 것이기 때문에, luni-solar 세차운동(precession)이라 부른다. 우리는 자세한 것은 다루지 않을 것이다. 그러나 높은 정밀도를 요하지 않는다면, 이 효과가 몇 년에 걸친 짧은 기간 동안에는 매우 작으므로-지구의 북극은 완전히 한번 회전하는데 25800년이 걸린다.-그리 문제될 것은 없다.
이 글에서는 두가지 방법을 소개한다. 첫 번째는 대부분의 경우 사용할 수 있는 것이며(즉, 몇십년에 걸친 기간동안의 세차), 적용하기가 쉽고 빠르다. 두 번째 엄격한 방법은, 길고 짧은 시간에 상관없이 사용할 수 있는 행렬을 사용하는 방법이다.

Low-precision method

별이나 은하의 적경과 적위는 어떤 시간이나, 원기에 맞춰 카탈로그에 주어지게 된다. 최근에 많이 볼 수 있는 것 중의 하나는 아마 1950.0(정확히는 1950년 1월 0.923일)에 맞춰진 것이다. 거기에 주어진 좌표를 다른 시간의 좌표로 바꾸는 데는 다음 공식을 이용한다.

$$\alpha_1 = \alpha_0 + (3^s.07327 + 1^s.33617 \sin \alpha \tan \delta_0) \times N$$

$$\delta_1 = \delta_0 + (20''.0426 \cos \alpha_0) \times N$$

여기서 N은 1950.0년 이후로 지난 연도수이며, α_0와 δ_0는 1950.0의 좌표값이고, α_1과 δ_1은 새 좌표값이다. 이 공식은 tanδ의 값이 무한대가 되는 북극과 남극 근처의 지역에서는 잘 적용되지 않는다. 그 때는 다음과 같은 두 번째 공식을 사용해야 한다.

$$\alpha_1 = \alpha_0 + (m + n \sin \alpha_0 \tan \delta_0) \times N$$

$$\delta_1 = \delta_0 + (n' \cos \alpha_0) \times N$$

1950.0에 주어진 좌표를 바꾸기 위해, 아래 표에 주어진 m,n,n'값을 사용한다.

원기	m(second)	n(second)	n'(arcsec)
1900.0	3.07234	1.33646	20.0468
1950.0	3.07327	1.33617	20.0426
1975.0	3.07374	1.33603	20.0405
2000.0	3.07420	1.33589	20.0383

Rigorous method

어떤 원기(eqoch)에서 주어진 좌표를 엄밀하게 다른 시점의 좌표로 바꾸는데는 행렬이 사용된다. 이 방법은 두 부분으로 나누어 진행된다. 첫 번째로, 우리는 날짜 1에서 주어진 좌표 α1, δ1을 J2000.0 즉 2000년 1월 1.5일, epoch 0으로 바꿀 것이다. 두 번째로, 우리는 이것을 epoch 0으로부터 주어진 날짜2로 바꾸는 것이다.
우리는 먼저 세차 변수인 ξA, zA,θA를 주어진 날짜에서 계산하여야 한다. 이것들은 다음 공식에 의해 주어지는 각

도들이다.

$$\zeta_A = 0.6406161T + 0.0000839T^2 + 0.0000050T^3$$

$$z_A = 0.6406161T + 0.0003041T^2 + 0.0000051T^3$$

$$\theta_A = 0.5567530T - 0.0001185T^2 - 0.0000116T^3$$

여기서 T는 J2000.0부터 날짜1까지의 율리시안 세기를 말한다. T는 그러므로 다음과 같이 주어진다.

$$T = (JD1 - 2451545)/36525$$

여기서 JD1은 날짜1에서의 율리우스 역일이다. 우리는 날짜1로부터 epoch0까지 변환을 가능하게 해 주는 행렬 P'을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P' = \begin{pmatrix} CX \cdot CT \cdot CZ - SX \cdot SZ & CX \cdot CT \cdot SZ + SX \cdot CZ & CX \cdot ST \\ -SX \cdot CT \cdot CZ - CX \cdot SZ & -SX \cdot CT \cdot SZ + CX \cdot CZ & -SX \cdot ST \\ -ST \cdot CZ & -ST \cdot SZ & CT \end{pmatrix}$$

여기서, CX=cosξA, SX=sinξA, CZ=coszA, SZ=sinzA, CT=cosθA, ST=sinθA를 나타낸다.

다음으로 날짜1에서의 α1, δ1와 관련된 열벡터 v는 다음과 같이 구한다.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \cos\delta_1 \\ \sin\alpha_1 \cos\delta_1 \\ \sin\delta_1 \end{pmatrix}$$

자, P'에 v를 곱한 다음 epoch 0에서의 좌표값과 관련된 열벡터 s를 얻는다.

$$s = P'v$$

날짜2에서의 좌표와 관련된 열벡터 w는 P와 s의 곱으로 계산될 수 있다.

$$w = Ps$$

마지막으로 새 좌표 α2,δ2를 w의 원소들로부터 뽑아낸다.

$$\tan\alpha_2 = \frac{n}{m}$$

$$\sin\delta_2 = p$$

장동 Nutation

태양과 달의 결합된 중력장이 정확히 원형이지 않은 지구에 작용함으로써, 지구의 회전축의 방향은 25800년을 주기로, 천천히 소용돌이친다. 우리는 세차라 불리는 이 영향을 어떻게 다루어야 하는지를 앞에서 알아보았다. 그러한 규칙적인 운동에 보태어져 달과 태양의 거리와 방향에 관계가 있는 아주 미세한 주기적인 현상이 있다. 이 미약한 흔들림을 장동(지축의 미동, nutation)이라 부른다. 이것은 황경과 황도경사각에 Δψ, Δε의 영향을 준다.

여기에 기술된 방법은 1984년 이전의 장동 이론이다. 우리는 가장 중요한 요인들만을 다루며, 거의 0.5초 이내의 정확도를 얻을 수 있다.

먼저, 다음 공식을 이용하여 1900년 1월 0.5일로부터 구하려는 날짜까지의 율리우스 세기 T를 계산한다.

$$T = (JS - 2415020.0)/36525$$

여기서 JD는 율리우스 역일이다. T에 관한 이곳의 정의는 다른 글들에서의 정의인 epoch2000 1월 1.5일 기준과는 다름을 주의하여라.

다음으로 우리는 태양의 평균 경도, L과 달의 하강점의 경도, Ω를 구한다.

$$L = 279.6967 + 360.0 \times (A - INT(4))$$

$$A = 100.002136 \times T$$

$$\Omega = 259.1833 - 360.0 \times (B - INT(B))$$

$$B = 537267 \times T$$

황경과 황도 경사각에 대한 장동의 효과는 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta\psi = -17.2\sin\Omega - 1.3\sin(2L)\text{초}$$

$\Delta\epsilon = 9.2\cos\Omega + 0.5\sin(2L)$초

광행차 Aberration

우리 계산의 정확도를 높이기 위해서, 고려해야할 많은 미세한 영향들이 있다. 이것들 중의 하나가 바로, 광행차 (aberration)로서, 지구가 태양 주위를 도는 속도에 의해 야기되는 것이다. 자전거 타는 사람에게 수직으로 떨어지는 비가 약간의 각도를 가지고 있는 것처럼 보이는 것과 마찬가지로, 빛이 무한대의 속도를 가지고 있지 않기 때문에 지구의 운동이 천체의 보이는 각도에 약간 영향을 미친다.
이 보정은 아주 작고, 최대가 된다고 해도, 20.5초이다.(0.000569°) 황경에 미치는 영향, $\Delta\lambda$와 황위에 미치는 영향 $\Delta\beta$는 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$\Delta\lambda = -20.5\frac{\cos(\lambda_{\odot} - \lambda)}{cos\beta}$$

$$\Delta\beta = -20.5\frac{\sin(\lambda_{\odot} - \lambda)}{cos\beta}$$

여기서 λ와 β는 실제 황경과 황위이고, $\lambda_{\odot}$는 태양의 황위이다. 보이는 황경과 황위는 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$$

실제 적경과 적위에 대한 보정, $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$는 다음과 같이 계산될 수 있다.

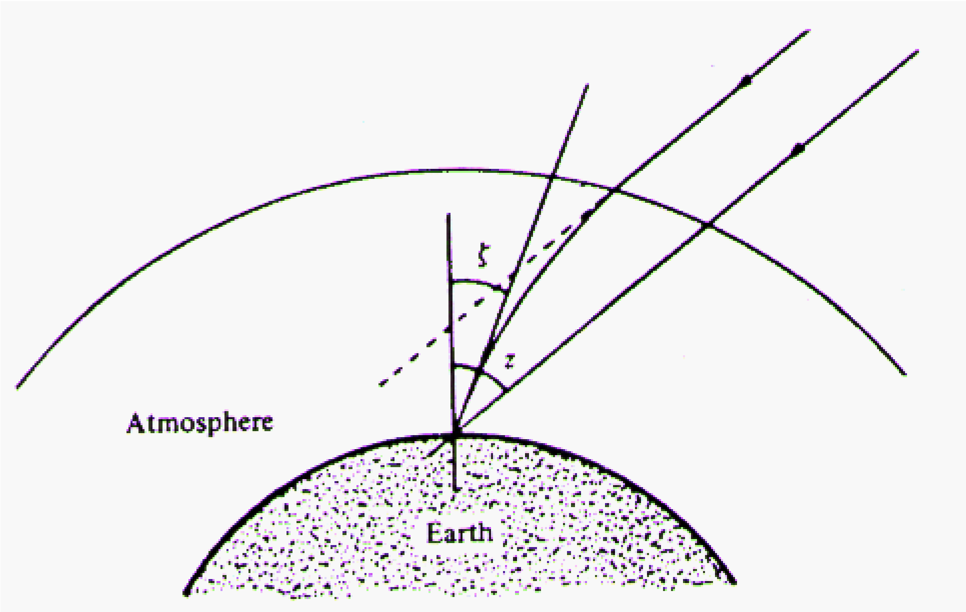
$$\Delta\alpha = -20.5\frac{\cos\alpha\cos\lambda_{\odot}\cos\epsilon + \sin\alpha\sin\lambda_{\odot}}{\cos\delta}\text{초}$$

$$\Delta\delta = -20.5\left\{\cos\lambda_{\odot}\cos\epsilon(\tan\epsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta) + \cos\alpha\sin\delta\sin\lambda_{\odot}\right\}\text{초}$$

여기서 α와 δ는 실제 좌표값이고, ϵ는 황도 경사각이다. 이 보정들은 겉보기 좌표를 구하기 위해 실제 좌표값들에 더해져야 한다.

대기에 의한 굴절 Refraction

지금까지의 모든 계산에서, 우리는 멀리 떨어진 물체에서 오는 빛은 가장 최단거리인, 직선으로 온다고 가정하였다. 그러나 이것은 실제로는 그렇지 않다.(천정을 관측할 때를 제외하고선) 그 이유는 지구의 대기가 빛을 휘게 하기 때문이다. 결과적으로 땅에 도달하는 빛은 대기가 없을 때보다 약간 다른 각도로 보이게 된다. 이것을 대기의 굴절(atmospheric refraction)이라 부르며 그 효과는 별이 실제보다 천장에 더 가깝게 보인다는 것이다.



굴절의 효과는 천정각(zenith angle) 혹은 천정거리(zenith distance)라 불리는 90-고도와 대기의 상태, 특히 기압과 기온에 좌우된다. 만일 우리가 천정각 ζ인 별을 지구 표면에서 관측한다면 그 실제 천장각은 z=ζ+R로 주어진다. 여기서 R은 굴절각이다. 고도 15° 이상에서 사용가능한 R에 대한 대략적인 표현은 다음과 같다.

$$R = 0.00452P\tan z/(273+T)^{\circ}$$

여기서 T는 관측지의 기온, P는 밀리바로 표현된 관측지의 기압이다. 이 공식은 15°이상의 고도에서 대략 6초의 정확도를 가진다. 더 낮은 고도에서는 다음과 같은 공식을 사용하는 것이 더 나은 결과를 준다.

$$R = \frac{P(0.1594 + 0.019a + 0.00002a^2)}{(273+T)(1+0.505a+0.0845a^2)}^{\circ}$$

여기서 a는 각도로 표현된 고도이다. 실제 적도좌표계와 황도 좌표계와 은하좌표계의 굴절의 효과는 일단 지평좌표계로 바꾼 다음에 고도에 R을 더하고, 다시 원래 좌표계로 바꾸는 것이 효과적이다.

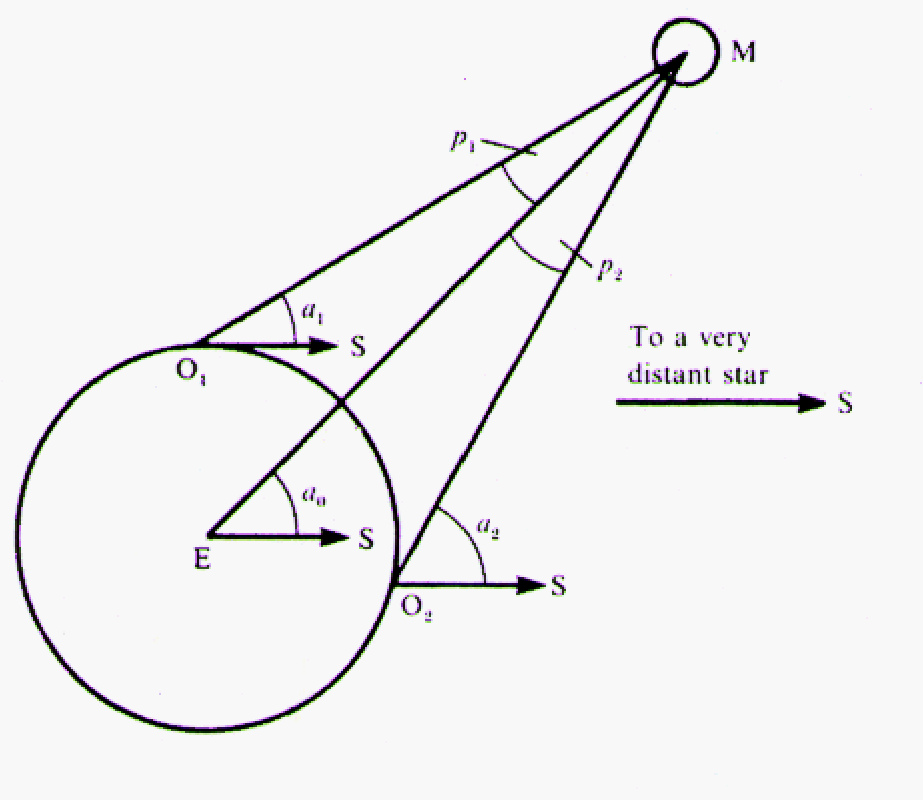
지평선 근처에서 R의 크기는 대략 34분이다. 이것의 효과가 겉보기 고도를 증가시키기 때문에 뜨는 시간이 빨라지고, 지는 시간이 늦어진다. 그래서 결과적으로 하루의 길이는 대기의 효과로 인해 길어진다. 우리는 뜨고 지는 시간과 고도에 미치는 이 효과를 이미 다루었다. 다른 방법으로, 우리는 뜨고 지는 순간의 시간각, H에 미치는 효과를 계산할 수 있는데,

$$\Delta H = \frac{34}{15\cos\phi\cos\delta\sin H}$$

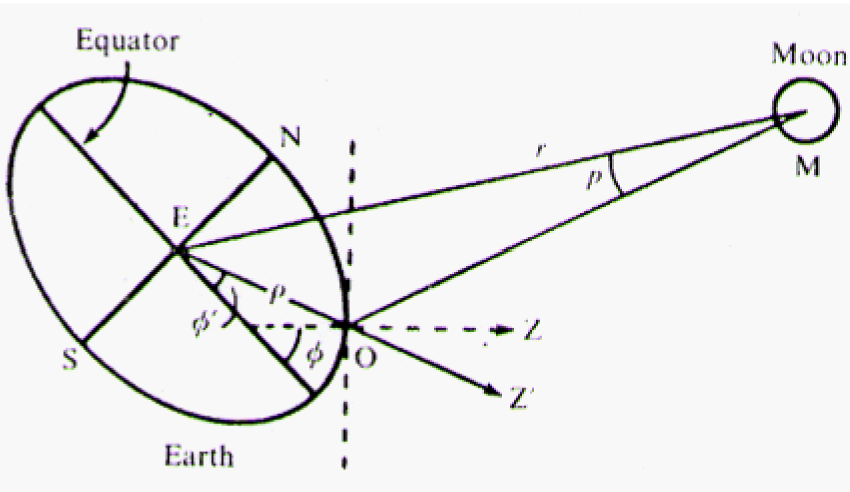
가 된다. 여기서 ΔH는 실제 시간각이 줄어드는 값이다.

지심 시차

이후에 우리는 태양과 달, 그리고 다른 태양계 일원의 좌표를 계산할 것이다. 이 좌표값들은 지심 좌표(geocentric coordination)로서 지구의 중심에서 관측할 수 있는 것이다. 만일 천체가 지구로부터 아주 멀리 떨어져 있다면 지구 표면의 어느 곳에서나 이 값과 같은 값을 가진다. 그러나 상대적으로 가까운 태양이나 특히 달과 같은 물체들은 정확한 관측자의 위치가 어딘가에 따라 약간씩 다른 위치에서 보인다. 이것이 아래 그림에 설명되어 있다.



두 관측자 O1, O2가 달M을 보고 있고, E는 지구의 중심이다. 각각은 아주 먼 곳의 별S와 달 M의 각도를 계산하게 된다. 별은 아주 먼 곳에 있기 때문에 O1S와 O2S는 평행하고, 관측자는 하늘 상에서 다른 물체들에 비해 같은 위치에서 그것을 보게 된다. 그러나 그들은 a1과 a2를 같은 각으로 측정하지 않을 것이며, 달의 위치에 대해 서로 합의를 보지 못할 것이다. 만일 a0가 달의 지구 중심에서의 적경을 말한다면, 각각의 관측자는 a1과 a2를 얻기 위해 각각 다른 보정값을 a0에 더해야 할 것이다. 이 겉보기 이동은 지심 시차(geocentric parallax)라 불리는 것으로, 우리는 예를 들어 식 상황을 계산할 때와 같이, 때때로 이 보정을 해 줄 필요가 있다. 문제는 지구의 모양이 완벽한 원이 아니라 양극을 잇는 선을 따라 찌그러진, 회전하는 타원체이기 때문에 약간 복잡하다. 지구를 어떤 경선에 따라 자르게 되면 그것은 대략 타원이 되며, 위선을 따라 자르게 되면 원이 된다. 만약 아주 정밀한 보정을 하려한다면, 우리는 지구의 모양, 즉 정확한 원으로부터의 편차를 고려해야한다. 이 상황은 아래 그림에 아주 과장되어 표현되어 있다.



여기서 E는 지구, 그리고 N,S는 각각 북극과 남극이다. O에 있는 관측자의 천장 방향은 연직방향인 점선 OZ일 것이다. 이것이 적도와 이루는 각이 지리적인, 혹은 천문학적인 위도(geographical or astronomical latitude) ϕ가 된다. 지구는 정확한 원이 아니기 때문에, 그의 지구 중심으로부터의 연직방향 EZ'는 위도와 약간 달라지며, 이것을 그의 지심 위도(geocentric latitude) ϕ'라 한다. 시차의 보정에 있어서, 우리는 $\rho\sin\phi'$와 $\rho\cos\phi'$를 필요호 한다. 여

기서 ρ는 지구 중심과 관측자의 거리이며, 지구 반지름의 몇배로 나타낸다. 관측자의 해발 고도를 h라 하면,

$$\rho \sin \phi' = 0.996647 \sin u + \frac{h}{6378140} \sin \phi$$

가 된다. 여기서

$$\tan u = 0.996647 \tan \phi$$

이다. φ는 북반구에서는 양수, 남반구에서는 음수로 계산한다.

위의 그림에서, 각 p가 지심 시차라 불리는 것이다. 이 각이 천체에서 봤을 때, 관측자와 지구 중심이 이루는 각도이다. 만일 관측자가 그의 지평면에서 그 천체를 본다면(즉, 천장각 90°) p는 지평 시차(horizontal parallax)라 불린다. 또한 관측자가 적도에 있을 때, 그 각은 적도 지평 시차(equatorial horizontal parallax)라 부르고, 기호 P 로 표시한다.

시차에 대한 보정

만일 천체가 지심 시간각 H와 지심 적경 α를 가지고 있다면, 겉보기 시간각 H'와 겉보기 적경 α'(시차를 보정한)은 다음과 같이 주어진다.

$$H' = H + \Delta$$

이 때,

$$\tan \Delta = \frac{\rho \cos \phi' \sin H}{r \cos \delta - \rho \cos \phi' \cos H}$$

이다. 여기서 ρcosφ'는 앞에서 계산된 값이고, r은 지구 중심으로부터 그 천체 까지의 거리로, 지구 반지름인 6378.14와의 비율로 나타낸다. 만일 r'이 킬로미터로 나타낸 거리라면,

$$r = \frac{r'}{6378.14}$$

이다. 다시 말하지만, ρsinφ'와 ρcosφ'는 앞에서 기술된 방법을 사용하여 구할 수 있다.

이러한 긴 계산은 단지 아주 큰 시차를 보이는 달의 경우에만 꼭 따져줘야 하는 것이다. 태양, 행성, 혜성은 일반적으로 훨씬 작은 값을 가지기 때문에 무시하더라도 정확도에 심각한 손해는 없다. r은 다시 한번 지구 중심으로부터 그 천체까지의 거리임을 상기하라. 이 경우에, 천문 단위로 표시된다.

$$\pi = \frac{8.794}{r} \text{초}$$

라 하면

$$\alpha' = \alpha - \frac{\pi \sin H \rho \cos \phi'}{\cos \delta}$$

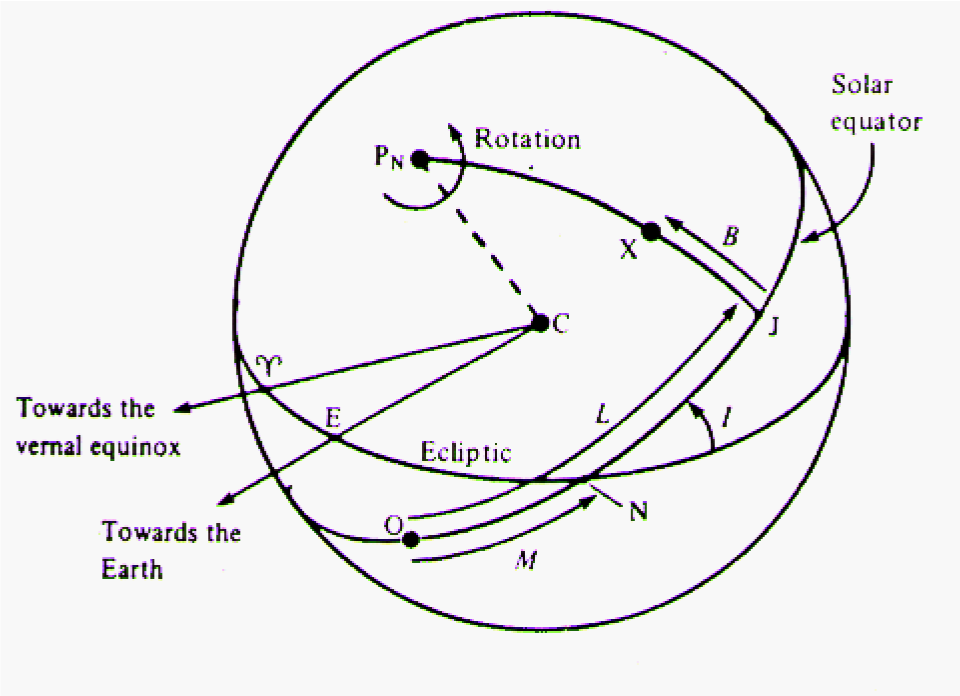
$$\delta' = \delta - \pi(\rho \sin \phi' \cos \delta - \rho \cos \phi' \cos H \sin \delta)$$

가 된다. π는 때때로 시차를 나타내기 위해 사용되는 기호이다. 이 기호가 원주율인 3.141592654를 나타내는지, 시차를 나타내는지 구별해서 사용해야한다.

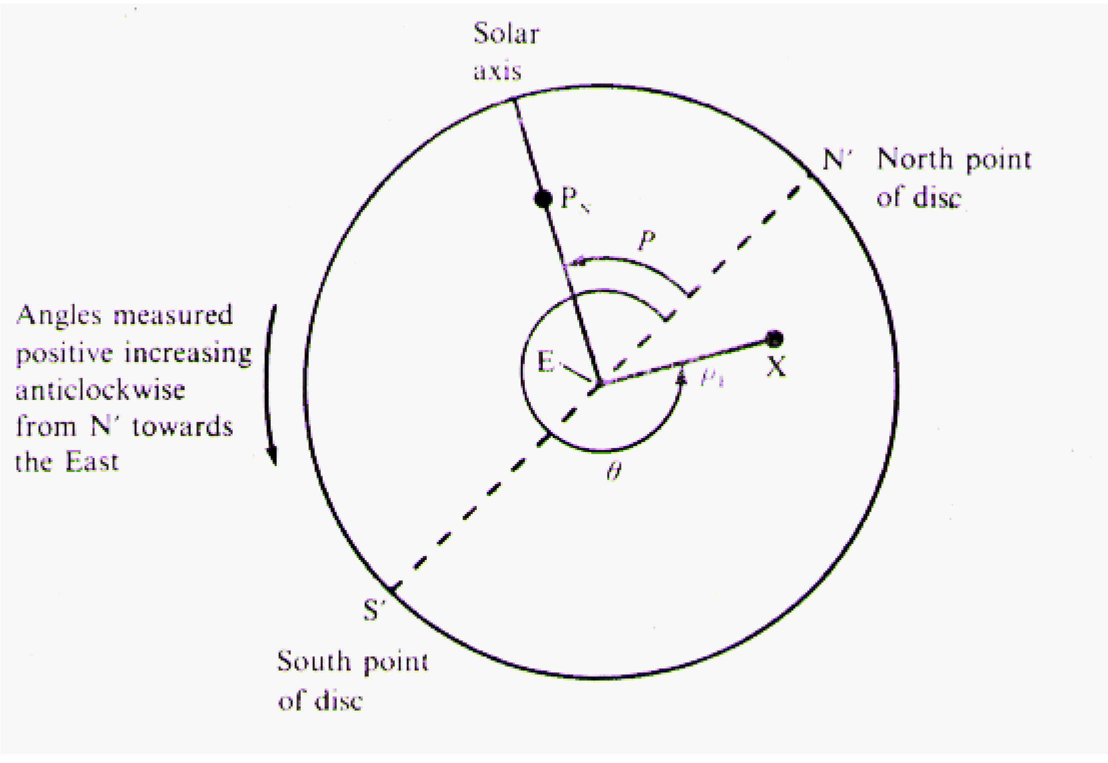
달을 제외하고, 지심 시차는 종종 무시될 수 있다.

일면 좌표 Heliographic coordinates

일면좌표는 태양 표면상의 어떤 위치(흑점과 같은)를 나타내는데 쓰이는 좌표이다. 다른 천문학적인 좌표은 대게 위도는 기준면에 관련이 있고, 경도는 고정된 점에 관련이 있다. 이 경우에는 기준면은 황도면에서 I=7°15' 기울어진 태양의 적도로 잡고, 고정된 점은 1854년 1월 1일 정오에(JD 2398220.0) 태양의 적도가 황도를 뚫고 올라오는 점으로 잡는다. 태양 표면상에 우리가 이 점을 표시할만한 어떤 것도 없기 때문에, 우리는 이 점이 25.38일을 주기로 회전한다고 가정한다. 이 상황이 아래 그림에 설명되어 있다.



구면은 태양을 나타내며, 대원 ONJ는 태양의 적도를 나타낸다. PNC는 태양의 회전축이고, 적도상의 어떤 점도 O에서 N의 방향으로 회전한다. 황도면은 태양 표면상의 대원 γEN이고, 따라서 점 N이 태양 적도의 황도면에 대한 상승점이다. 태양 중심으로부터 지구까지, 춘분점까지, 가상의 선을 그어서 그것과 태양 표면이 만나는 점을 E, γ라 하자. O는 1854년 1월 1일 정오에 N의 위치에 있었던 점이다. 어떤 흑점 X는 일면 위도가 B(북쪽이 양수, 남쪽이 음수), 경도(태양의 회전 방향으로 계산되며, O로부터 적도면을 따라 측정한다)가 L인 위치에 있다. 만일 우리가 태양을 관측한다면(이것은 반드시 스크린에 투영된 상으로만 가능하다.) 우리는 E를 중심으로 하는 납작한 디스크를 보게 될 것이다. 이것이 아래 그림에 있다.



같이 있는 점 Pn은 태양의 북극이고, X는 흑점의 좌표이다. 점선 N'S'은 지구의 회전축 NS를 디스크 상에 투영한 것이다. 우리는 점 X의 위치를 ρ1, θ라고 정의한다. 이 방법은 ρ1, θ를 B, L로 바꾸는 것이다. 이것을 하기 위해, 우리는 이 점의 중심 E의 일면 좌표 B0, L0를 찾아야 한다.

$$\tan L_0 = \frac{\sin(\Omega - \lambda_\odot)\cos I}{-\cos(\Omega - \lambda_\odot)}$$

$$\sin B_0 = \sin(\lambda_\odot - \Omega)\sin I$$

여기서 λ 는 태양의 지심 황경이고, I는 태양 적도의 황도에서 기울어진 각도(=7°15')이며, Ω는 하강점의 위도(위의 그림에서 γN이 이루는 각), M은 처음 그림에서 O와 N이 이루는 각이다. Ω는 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega = 74°22' + 84'T$$

여기서 T는 epoch 1900 1월 0.5일로부터 지난 율리우스 세기이다. M은 다음과 같이 주어진다.

$$M = 360 - M'$$

여기서 JD는 율리우스 역일이다. M'은 360의 배수를 곱해서 0~360의 범위로 맞춰져야 한다.

캐링턴 회전수 Carrington rotation numbers

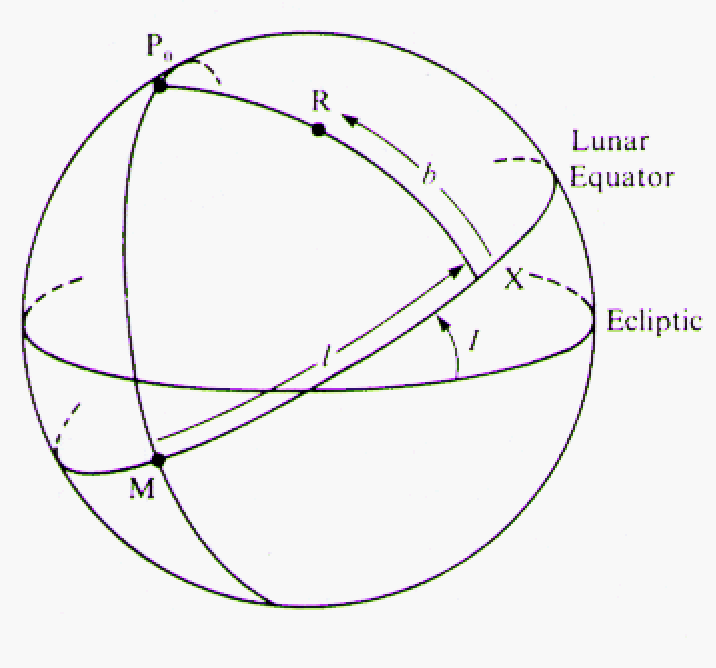
태양의 회전은 1853년 11월 9일부터 시작하는 Carrington Rotation Number, CRN에 의해 세어진다. 한번의 회전은 L0값이 360°만큼 감소하는데 걸리는 기간이다. 이것의 평균은 27.2753일이다. 우리는 Astronomical Ephemeris 상에 있는 1979년 12월 27.84일에 1690바퀴라는 언급을 이용하여 CRN을 꽤 정확히 구할 수 있다.

$$\mathrm{CRN} = 1690 + \left(\frac{JD - 2444235.34}{27.2753}\right)$$

여기서 JD는 율리우스 역일이다. 결과는 가장 가까운 정수로 처리한다. 회전수가 바뀌는 시점에서 ±1정도의 오차가 있을 수 도 있다.

월면 좌표 Selenographic coordinates

달의 표면상에 있는 어떤 점의 위치는 월면 좌표(selenographic coordinates)에 의해 표현된다. 이것 또한 다른 천문 좌표계와 마찬가지로, 위도는 기준면을 참고로 하고, 경도는 고정된 기준점을 참고로 한다. 이 경우에는, 황도면에서 I=1°32'32.7"만큼 기울어진 달의 적도를 기준면으로 한다. 그러나, 경도를 0으로 하는 고정된 점을 잡기에는 약간의 문제점이 있다. 왜냐하면 달이 너무나 많은 요동을 치고 있기 때문이다. 특히, 달의 회전축은 그 평균 위치를 중심으로 진동하고 있다. 그 현상은 칭동이라 알려져 있다. 그러나 그 평균 위치조차 고정되어 있지 않고, 18.6년을 주기로 세차 운동을 한다. 그럼에도 불구하고, 우리는 달의 표면에서 기준점을 잡는데, 그것은 지구의 중심에서 봤을 때, 달의 중심을 긴 시간동안의 평균한 점이다. 이것이 경도의 기준점이 된다. 현재 보이는 월면의 중심은 평균적인 중심으로부터 경도 8도, 위도 6도나 떨어져 있다. 월심 천구(달을 중심으로 한 천구)가 아래 그림에 그려져 있다.



황도와 달의 적도가 그려져 있고, 그들은 서로 각도 I를 이루고 교차하고 있다. P0는 적도의 극을 나타낸다. M은 지구 중심에서 본 달 표면의 평균 중심이다. P0와 M을 가로지르는 대원이 가장 기준 자오선이고, 경도 0이 된다. 점 R은 달 표면의 크레이터이고, P0와 R을 가로지르는 대원은 X에서 적도와 만난다. 이 경우 R의 월면 경도는 M으로부터 X까지 적도를 따라간 각 l이고, 월면 위도 b는 달의 중심에서 X와 R이 이루는 각이다. 경도는 서쪽으로 갈수록(Mare Crisium 방향) 증가하고, 위도는 북쪽으로 갈수록 증가한다. 어떤 순간에, 보이는 달의 중심을 sub-Earth 점이라 한다. 이 점의 월면 좌표를 구해보자. le, be는 다음과 같이 계산된다.

$$\sin b_e = -\cos I \sin\beta + \sin I \cos\beta \sin(\Omega - \lambda_m)$$

$$\tan l_e = \frac{-\sin\beta\sin I - \cos\beta\cos I \sin(\Omega - \lambda_m)}{\cos\beta\cos(\Omega - \lambda_m)} - F$$

여기서 λm과 β는 각각 지심 황경과 황위이고, Ω는 달의 평균 궤도가 황도면과 이루는 각이다. F=L-Ω이고, L은 달의 평균 황경이다. Ω와 F는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\Omega = 125.044522 - 1934.136261T$$

$$F = 93.271910 + 480202.0175T$$

여기서, T는 epoch 2000 1월 1.5일로부터 계산한 율리우스 세기이다. 즉,

$$T = (JD - 2451545.0)/36525$$

달 적도의 극(P0)에 해당하는 위치를 나타내는 각 C는 태양 표면의 위치각을 측정하는 방법과 같은 방법으로 구할 수 있다. 즉, 현재 달의 북점으로부터 반 시계 방향으로 계산한다. 우리는 이를 다음과 같은 방법으로 계산할 수 있다.

$$C = C_1 + C_2$$

$$\tan C_1 = \frac{\cos(\Omega - \lambda_m)\sin I}{\cos\beta\cos I + \sin\beta\sin I\sin(\Omega - \lambda_m)}$$

$$\tan C_2 = \frac{\sin\epsilon\cos\lambda_m}{\sin\epsilon\sin\beta\sin\lambda_m - \cos\epsilon\cos\beta}$$

ε는 황도경사각이다.

태양의 월면 좌표(즉, sub-solar 점)또한 꽤 쉽게 찾을 수 있다. 우리는 le, be를 계산할 때와 같은 방정식을 쓸 수 있는데, λm, β는 달의 일심 황도 좌표λm', β'로 바꿔야 한다. 그 값들은 다음으로부터 구해진다.

$$\lambda'_m = \lambda_\odot + 180 + 26.4\cos\beta\sin(\lambda_\odot - \lambda_m)/\pi R_{\text{도}}$$

π는 분으로 표시된 달의 적도지평시차이다. R은 천문단위(AU)로 표시된 태양 지구 거리이고, λ 는 태양의 지심황경

이다. 태양의 월면 경도는 때때로 (90-경도)로 표시되고, 이값을 colongitude라 한다. 만일 우리가 이 값을 알 수 있다면 달의 아침 명암경계선은 월면 경도로 360-colongitude가 된다. 저녁 명암 경계선은 180-colongitude가 된다.